

FREE YOUR MIND

THE MATRIX

$$\varphi: \begin{matrix} V \\ \cup \\ B \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} W \\ \cup \\ B' \end{matrix}$$

THÉORÈME 7.10 (Formule de changement de base). Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}_n \subset V$ et $\mathcal{B}', \mathcal{B}'_n \subset W$ des bases de V et W . On a la relation

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}_n}(\varphi) = \text{mat}_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}'}(\text{Id}_W) \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_n}(\text{Id}_V).$$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}_n}(\text{Id}_V) = \text{coord des elts de } \mathcal{B}_n \text{ ds } \mathcal{B}$$

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}'_n \mathcal{B}'}(\text{Id}_W) &= \text{coord de } \mathcal{B}' \text{ ds } \mathcal{B}'_n \\ &= \text{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'_n}(\text{Id}_W)^{-1} \end{aligned}$$

DÉFINITION 7.9. La matrice carree de taille $d = \dim V$,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_n} := \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_n}(\text{Id}_V)$$

est appelle matrice de changement de base, de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}_n$ ou encore la matrice de passage de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_n$.

Sa j -ieme colonne est formee par les coordonnees du j -ieme vecteur $\mathbf{e}_{nj}$ exprime comme combinaison lineaire dans la base $\mathcal{B}$. La formule de changement de base se reecrit alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}_n}(\varphi) = \text{mat}_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}'} \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_n}.$$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_n \mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}' \mathcal{B}_n}^{-1}$$

Cas des Endomorphismes

Si $V = W$ souvent on prend $B' = B \subset V$
 $B'_n = B_n \subset V$

et on note

$$\text{mat}_B(\varphi) := \text{mat}_{BB}(\varphi)$$

$$\text{mat}_{B_n}(\varphi) := \text{mat}_{B_n B_n}(\varphi)$$

La formule de changement de base
s'écrit

$$\begin{aligned}\text{mat}_{B_n}(\varphi) &= \text{mat}_{B_n B}^{-1} \times \text{mat}_B(\varphi) \times \text{mat}_{B B_n} \\ &= (\text{mat}_{B B_n})^T \times \text{mat}_B(\varphi) \times \text{mat}_{B B_n}\end{aligned}$$

Matrices Equivalentes
/ Similares

DÉFINITION 7.10. Deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont dites équivalentes si il existe des matrices inversibles $A \in \text{GL}_{d'}(K)$, $B \in \text{GL}_d(K)$ telles que

$$N = A.M.B.$$

Par la formule de changement de bases on a:

PROPOSITION 7.8. Deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont équivalentes ssi il existe V de dimension d et W de dimension d' , des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}_n \subset V$ et $\mathcal{B}', \mathcal{B}'_n \subset W$ et une application linéaire $\varphi : V \mapsto W$ telle que

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi), \quad N = \text{mat}_{\mathcal{B}'_n\mathcal{B}_n}(\varphi)$$

PROPOSITION. *La relation "être équivalente" est une relation d'équivalence (reflexive, symétrique, transitive) sur $M_{d' \times d}(K)$.*

THÉORÈME 7.11. *Soient $M, N \in M_{d' \times d}(K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

- (1) M et N sont équivalentes,*
- (2) $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$,*
- (3) M et N sont équivalentes à $I_{d' \times d}(r)$.*

$$0 \leq r \leq \min(d, d')$$

DÉFINITION 7.11. On dit que deux matrices M, N sont semblables ou conjuguées si il existe $C \in GL_d(K)$ tel que

$$N = C.M.C^{-1}.$$

La relation "etre semblables" ou "etre conjuguées" est une relation d'équivalence.

Une classe d'équivalence pour cette relation, l'ensemble des matrices de la forme

$$M^{\natural} := \text{Ad}(GL_d(K))(M) = \{C.M.C^{-1}, C \in GL_d(K)\}$$

est appelée classe de conjugaison (de M) et on note

$$M_d(K)^{\natural} = \{M^{\natural}\} = M_d(K) / \sim$$

l'ensemble des classes de conjugaison.

PROPOSITION 7.9. Deux matrices $M, N \in GL_d(K)$ sont semblables ssi M et N sont les matrices d'un meme endomorphisme dans des bases convenables: il existe un espace vectoriel de dimension d , V , deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}_n \subset V$ et une application lineaire $\varphi : V \mapsto V$ telle que

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi), N = \text{mat}_{\mathcal{B}_n}(\varphi).$$

$$\text{Ad}(C) : M \rightarrow CMC^{-1}$$

Conjugaison par C

PROPOSITION 7.10. *La conjugaison $\text{Ad}(C)$ est un automorphisme de l'algèbre $M_d(K)$:*

- (1) *Linearité: On a $\text{Ad}(C)(\lambda.M + N) = \lambda\text{Ad}(C)(M) + \text{Ad}(C)(N)$.*
- (2) *Multiplicativité: $\text{Ad}(C)(M.N) = \text{Ad}(C)(M).\text{Ad}(C)(N)$.*
- (3) *Inversibilité: $\text{Ad}(C)$ est bijective et $\text{Ad}(C)^{-1} = \text{Ad}(C^{-1})$.*

Action adjointe

PROPOSITION 7.11. On dispose donc d'une application

$$\text{Ad}(\bullet) : C \in \text{GL}_d(K) \mapsto \text{Ad}(C) \in \text{Aut}(M_d(K)) \simeq \text{GL}_{d^2}(K)$$

appelée application adjointe.

L'application adjointe $\text{Ad}(\bullet)$ est un morphisme de groupes et définit donc une action à gauche $\text{GL}_d(K) \curvearrowright M_d(K)$. Son noyau est formé par les matrices scalaires:

$$\ker \text{Ad} = K^\times \text{Id}.$$

Preuve: On a vu que $\forall C$ $\text{Ad}(C)$ est
une matrice inversible
$$\text{Ad}(C) \in \text{Aut}(M_d(K)) = \text{GL}(M_d(K))$$

On veut montrer

$$\forall C, C' \quad \text{Ad}(CC') = \text{Ad}(C) \circ \text{Ad}(C')$$

$$\text{Ad}(C^{-1}) = \text{Ad}(C)^{-1} \quad \checkmark$$

$$\forall M \in M_d(K)$$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(CC')(M) &= (CC')M(CC')^{-1} \\ &= CC'MC'^{-1}C^{-1} \\ &= \text{Ad}(C)(\text{Ad}(C')(M)) \\ &= (\text{Ad}(C) \circ \text{Ad}(C'))(M) \end{aligned}$$

$$\ker(\text{Ad}) = \left\{ C \in \text{GL}_d(K) \right. \\ \left. \text{Ad}(C) = \text{Id}_{M_d(K)} \right\}$$

$$= \left\{ C \in \text{GL}_d(K) \quad \forall M \in M_d(K) \right. \\ \left. CM C^{-1} = M \right\}$$

$$= \left\{ C \in \text{GL}_d(K) \quad \forall M \in M_d(K) \right. \\ \left. CM = MC \right\}$$

$$\ker(\text{Ad}) = K^\times \cdot \text{Id} = \{ \lambda \text{Id} \mid \lambda \in K^\times \}$$

- 2 approches

1) Brutale en multipliant
les matrices
C avec les E_{ij} $i, j \leq d$.

2) Approche "plus intriquée" utilisant les endomorphismes.

Si $C = \lambda \text{Id}_d$ $\lambda \in K^\times$ alors

$$\forall M \quad CM = MC$$

$$\lambda \text{Id}_d \cdot M = \lambda M = \lambda M \text{Id}_d = M(\lambda \text{Id}_d)$$

$$K^\times \text{Id}_d \subset \ker(\text{Ad})$$

— Soit C tq $\forall M \quad CM = MC$
alors $C = \lambda \text{Id}_d$.

On choisit B^0 la base canonique de K^d
et toute matrice représente un endomorphisme
de K^d exprime ds cette base

$$\text{mat}_{B^0} \varphi =: C \quad \text{mat}_{B^0} E_{ij} =: E_{ij}$$

si C commute avec tout matrice

$\Rightarrow C$ — avec les E_{ij}

$\Leftrightarrow \varphi$ commute avec tous les E_{ij}

$$\varphi \circ E_{ij} = E_{ij} \circ \varphi$$

Rmq: en fait si C commute avec les E_{ij}
alors C commute avec toutes les M

en effet $M \rightarrow CM - MC$ est linéaire
et elle est nulle ($= \underline{0}_{M_d(K)}$)
ssi elle est nulle sur une base
de $M_d(K)$

On suppose que $\forall i, j \leq d$

$$\varphi \circ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \circ \varphi$$

$$\varepsilon_{ij}(v) = e_i^*(v) \cdot e_i$$

On va calculer $\varphi(e_i)$

$$e_i = \sum_{ii} \varepsilon_{ii}(e_i)$$

$$\varphi(e_i) = \varphi\left(\sum_{ii} \varepsilon_{ii}(e_i)\right) = (\varphi \circ \sum_{ii})(e_i)$$

$$= \sum_{ii} (\varphi(e_i)) = e_i^*(\varphi(e_i)) e_i$$

$$\varphi(e_i) = \lambda_i e_i \quad \lambda_i \in K$$

$$C = \text{mat}_{B^0}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_d \end{pmatrix}$$

$$= \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

$$\lambda_i \in K^\times$$

$$C^{-1} = \text{Diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_d^{-1})$$

On veut mq le λ_i $i \leq d$ sont tous égaux.

$$\text{On sait que } \varphi \circ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \circ \varphi$$

$$\varphi(\varepsilon_{ij}(e_j)) = \varphi(e_j^{\varepsilon}(e_j) e_i) = \varphi(e_j) = \lambda_j e_j = \lambda_i e_i$$

$$\begin{aligned} &= \varepsilon_{ij}(\varphi(e_j)) = \varepsilon_{ij}(\lambda_j e_j) = \lambda_j \varepsilon_{ij}(e_j) \\ &= \lambda_j e_i \quad \lambda_i = \lambda_j \quad \square \end{aligned}$$

The first matrix I designed was quite naturally perfect.

It was a work of art. Flawless. Sublime.

A triumph only equaled by its monumental failure.

The first matrix I designed was quite naturally perfect.

It was a work of art. Flawless. Sublime.

A triumph only equaled by its monumental failure.

The first matrix I designed was quite naturally perfect.

It was a work of art. Flawless. Sublime.

A triumph only equaled by its monumental failure.

Operations Elementaires

Operations sur les lignes

$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq d' \\ j \leq d}}$ la i -ieme ligne $L_i(M) = (m_{ij})_{j=1 \dots d}$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & & m_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{id} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{d'1} & & m_{d'd} \end{pmatrix} \longrightarrow L_i = (m_{i1} \ m_{i2} \ \dots \ m_{id})$$

DÉFINITION 9.1. Les operations elementaires sur les lignes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d' \times d}(K)$ vers $M_{d' \times d}(K)$: pour $i, j \in \{1, \dots, d'\}$ et $\lambda \in K^\times$ et $\mu \in K$

(I) Transposition: Echanger deux lignes $i \neq j \leq d'$ de M :

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

(II) Dilatation: Multiplier la i -ieme ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$:

$$L_i \rightarrow \lambda.L_i.$$

(III) Combinaison Lineaire: Additionner a la ligne i un multiple scalaire de la la j -ieme ligne pour $i \neq j$: $\mu \in K$

$$L_i \rightarrow L_i + \mu L_j$$

Case $K \neq 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right) = I_{d_3}$$

PROPOSITION 9.1. Ces trois opérations sont des applications linéaires bijectives

$$(I), (II), (III) : M_{d' \times d}(K) \mapsto M_{d' \times d}(K).$$

Preuve: On va voir que

ces 3 transformations sont données

d'inverse des
transf. sur les
lignes

par

$$M \longrightarrow T_{ij} \cdot M \quad (I)$$

$$M \longrightarrow D_{i,\lambda} M \quad (II)$$

$$M \longrightarrow CL_{ij,p} \cdot M \quad III$$

Avec $T_{ij}, D_{i,\lambda}, C_{Lij,p} \in GL_{d'}(K)$

On vérifie que pour $A \in M_{d'}(K)$

$[{}_xA]: M \in M_{d' \times d}(K) \rightarrow AM \in M_{d' \times d}(K)$

est linéaire et est inversiblessi

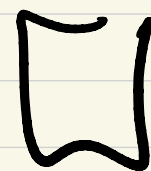
$A \in GL_d(K)$ et $[{}_xA]^{-1} = [{}_xA^{-1}]$.

On va voir que

$$T_{ij}^{-1} = T_{ij}, \quad D_{i,\lambda}^{-1} = D_{i,\lambda^{-1}}$$

$$(CL_{ij,\nu})^{-1} = CL_{ij,-\nu}$$

À venir



Rmq: I et III marchent pour $i \neq j$

$$T_{ii} = Id_{M_{d' \times d}}$$

$$CL_{ii,p} : L_i \leftarrow L_i + p L_i \\ = D_{i,1+p} L_i$$

si $i \neq j$ on prend $p \neq -1$ ($1+p \neq 0$)

PROPOSITION 9.2. *Les trois operations elementaires sont obtenues par multiplication a gauche de M par des matrices convenables: pour $1 \leq i \neq j \leq d'$*

$$(I) \ T_{ij} \cdot \bullet : M \mapsto T_{ij} \cdot M$$

$$(II) \ D_{i,\lambda} \cdot \bullet : M \mapsto D_{i,\lambda} \cdot M$$

$$(III) \ Cl_{ij,\mu} \cdot \bullet : M \mapsto Cl_{ij,\mu} \cdot M.$$

ou les matrices carrees T_{ij} , $D_{i,\lambda}$, $Cl_{ij,\mu} \in M_{d'}(K)$ sont definies par:

$$T_{ij} = \text{Id}_{d'} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

$$D_{i,\lambda} = \text{Id}_{d'} + (\lambda - 1) \cdot E_{ii}, \ \lambda \neq 0$$

$$Cl_{ij,\mu} = \text{Id}_{d'} + \mu \cdot E_{ij}, \ i \neq j \text{ ou } \mu \neq -1 \text{ si } i = j.$$

DÉFINITION 9.2. *Les matrices*

$$T_{ij}, \ D_{i,\lambda}, \ \lambda \neq 0, \ Cl_{ij,\mu}$$

pour $i, j \leq d'$, $\lambda \neq 0$, et si $i = j$, $\mu \neq -1$ sont appelees matrices de transformations elementaires.



ne pas confondre ces matrices
avec les matrices elementaires.

Preuve Soit $E_{ij} = (e_{ij,kl})_{\substack{k \leq d' \\ l \leq d'}}$

une matrice element carrée de taille $d' \times d'$

$$\text{on a } e_{ij,kl} = \delta_{k=i} \cdot \delta_{l=j}$$

$$(E_{ij} \cdot M)_{kl} = \sum_{v \leq d'} e_{ij,kv} m_{vl}$$

$$= \sum_{v \leq d'} \delta_{k=i} \cdot \delta_{v=j} m_{vl}$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad k \neq i$$

$$= m_{jl} \quad \text{pour} \quad l \leq d$$

$E_{ij} \cdot M$ est la matrice dont toutes les lignes sont 0 sauf la i -eme et la i -eme vaut $L_j(M)$

Ainsi $CL_{ij,p} = Id_d' + p E_{ij}$

$$CL_{ij,p}.M = M + p E_{ij}.M$$

= la matrice M à laquelle on a
ajoute $p.L_j$ à la i ème ligne.

On vérifie que les expressions données
réalisent bien les autres TELs.

DÉFINITION 9.3. On dit que N est ligne-équivalente à M ssi il existe une suite de transformations élémentaires qui transforme M en N .

– De manière équivalente, N est ligne-équivalente à M ssi il existe une suite finie de matrices des transformations élémentaires telle que N est obtenue à partir de M par multiplications à gauche par cette suite de matrices.

Ex:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ligne-equiv

Car $K \neq 2$,

PROPOSITION 9.3. La relation être "ligne-équivalente" est une relation d'équivalence sur $M_{d' \times d}(K)$.
– De plus deux matrices M, N ligne-équivalentes sont équivalentes au sens de la notion d'équivalence de deux matrices de la Définition 7.10.

COROLLAIRE. Si M et N sont lignes équivalentes alors

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(N).$$

 Par contre équivalente
 **THE WARNING**
 $\not\Rightarrow$ ligne-équivalente

Preuve: Reflexive $M \underset{\text{lig}}{\sim} M$

Rmq: $N \sim_{\text{lig}} M$ ssi il existe $n \geq 1$

n matrices de transf. elem. de lignes

$$T_1, \dots, T_n \quad + \quad \text{O}$$

$$N = T_n \cdot \dots \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot M$$

le T_i sont inversibles et T_i^{-1} sont
de matrices de TELs.

$$N = T_n \cdot \dots \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot M$$

$$\Rightarrow T_1^{-1} \cdot \dots \cdot T_{n-1}^{-1} \cdot T_n^{-1} N = M$$

$$\Rightarrow M \sim_{\text{lig}} N \quad \text{Symétrique}$$

$$\text{si } N = T_n \cdot \dots \cdot T_1 \cdot M \text{ et}$$

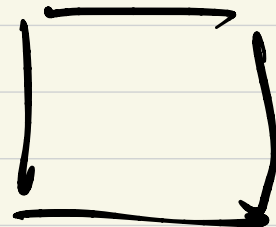
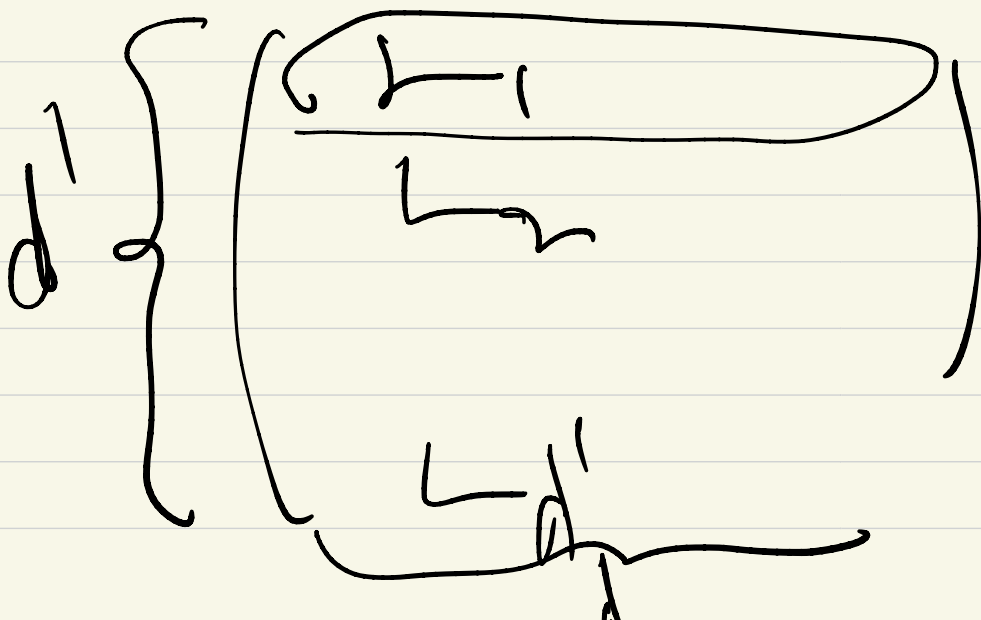
$$P = T_{n'}^{-1} \cdot \dots \cdot T_1^{-1} \cdot N \quad \text{Transitive}$$

$$P = T_{n'}^{-1} \cdot \dots \cdot T_1^{-1} \cdot T_n \cdot T_{n-1} \cdot \dots \cdot T_1 \cdot M$$

De plus $A = T_n \dots T_1 \in GL_{d'}(K)$

et on a $N = A.M.Id_d$

$\Rightarrow N$ est equiv à M .



PROPOSITION 9.4. Si $N \in M_{d' \times d}(K)$ est ligne-equivalente a M alors toute ligne de N est combinaison lineaire des lignes de M :

$$\forall i \leq d', \text{Lig}_i(N) \in \langle \text{Lig}_1(M), \dots, \text{Lig}_d(M) \rangle \subset K^d$$

et inversement les lignes de M sont combinaisons lineaires des lignes de N . En particulier les SEV engendres par les lignes de M et de N sont les memes

$$\langle \text{Lig}_1(M), \dots, \text{Lig}_d(M) \rangle = \langle \text{Lig}_1(N), \dots, \text{Lig}_{d'}(N) \rangle \subset K^d$$

Preuve: l'échange de deux lignes ne modifie pas les SEV engendres par les lignes de la matrice.

- la dilation d'une ligne donne a nouveau une ligne ds le m espace que M

et la CL de deux lignes envoie
la nouvelle ligne ds le m'espace

$$\text{Vect} \{ \text{Lig}_1(N), \dots, L_{d'}(N) \} \subset \text{Cig}_d(K)$$

$$\Rightarrow \text{Lig}_i(N) \subset \text{Vect} \{ \text{Lig}_1(N), \dots, L_{d'}(N) \}$$

$i = 1, \dots, d'$

$$\text{Vect} \{ \text{Lig}_1(N), \dots, L_{d'}(N) \} \subset \text{Vect} \{ \text{Lig}_1(N), \dots, L_{d'}(N) \}$$

et comme $M \sim_{L_g} N$

$$\text{Vect}\{L_{g_1}(M), \dots, L_{d'}(M)\} \subset \text{Vect}\{L_i(N) \mid i \leq d'\} \\ =$$



Echelonnage

DÉFINITION 9.4. Une matrice $M = (m_{ij}) \in M_{d' \times d}(K)$ est échelonnée si elle est nulle ou bien si

(1) Il existe $1 \leq r \leq d$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq d$ tels que

- Pour la ligne L_1 , le premier terme non-nul est le j_1 -ième: on a $m_{1j} = 0$ pour tout $j < j_1$ et $m_{1j_1} \neq 0$,
- Pour la ligne L_2 , le premier terme non-nul est le j_2 -ième: on a $m_{2j} = 0$ pour tout $j < j_2$ et $m_{2j_2} \neq 0$,
- $\vdots$
- Pour la ligne L_r , le premier terme non-nul est le j_r -ième: on a $m_{rj} = 0$ pour tout $j < j_r$ et $m_{rj_r} \neq 0$

(2) Si $r < d$ les lignes $L_{r+1}, \dots, L_{d'}$ sont toutes nulles.

Si M est non-nulle les $j_1 < \dots < j_r$ sont appelées les échelons de M et les m_{ij_i} , $1 \leq i \leq r$ sont les pivots de M .

$$\begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \cdots & \cdots & m_{1d} \\ 0 & 0 & 0 & m_{24} & \cdots & \cdots & m_{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{35} & \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r=3$$

$$d_1=2$$

$$d_2=4$$

$$d_3=5$$

DÉFINITION 9.5. Une matrice est echelonnee reduite si le seul coefficient non-nul d'une colonne contenant un pivot est le pivot lui-meme et il vaut 1:

– pour tout $i = 1, \dots, r$

$$m_{ij_i} = 1.$$

– Pour tout $i = 1, \dots, r$ et tout $1 \leq i' \neq i \leq d'$, on a

$$m_{i'j_i} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & m_{13} & 0 & 0 & \dots & m_{1d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & m_{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 9.1 (Gauss). Toute matrice est ligne-équivalente à une matrice échelonnée réduite.

Preuve: $M \in M_{d' \times d}(K)$ si $M=0$ c'est fini!

Si $M \neq 0$ on choisit une ligne de M
dont le premier coef non-nul a un
indice minimal parmi toutes les lignes
en permutant cette ligne avec la
première ops que c'est la ligne 1

comme $m_{1j_1} \neq 0$ on multiplie cette ligne par $m_{1j_1}^{-1}$ de sorte que ce 1^{er} coef vaut 1.

- si il existe d'autre ligne avec $m_{ij_1} \neq 0$ on les remplace par la CL

$$L_i \rightarrow L_i - m_{ij_1} \cdot L_1 \text{ et}$$

On se ramène au cas où tous les
coefs $m_{ij_1} = 0$ si $i > 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ | & | & 0 & m'_{2j_1+1} & m'_{2d} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & m'_{dj_1+1} & \dots & m'_{dd} \end{pmatrix}$$

j_1

"Rehelotte" avec les lignes

$L'_2, \dots, L'_d$

Comme beaucoup de coefs sont
nuls ces opérations ne modifient
que les coefs de la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} m_{2,d+1} & m'_{2,d} \\ \vdots & \vdots \\ m'_{d,d+1} & \dots m'_{d,d} \end{pmatrix}$$

On recommence au plus $d'-1$ fois

La "remontada"

On considère la dernière ligne
ayant un pivot (l'échelle le + loin)
et on "tue" les coefs de la colonne
au dessus de ce pivot par CL
Ces opérations ne changent rien aux

coefficient au dessus et a gauche
du pivot.

et "rehelette"

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 9.5. Deux matrices ligne-équivalentes et échelonnées réduites sont égales.

COROLLAIRE 9.1. (Unicité de la forme échelonnée réduite) Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$ une matrice alors M est ligne-équivalente à une unique matrice échelonnée réduite (qu'on appelle la forme échelonnée réduite de M).

Preuve: Soit M une matrice ligne équivalente
à deux matrices échelonnées réduites

R, R'

$$M \sim_{\text{lig}} R \text{ et } M \sim_{\text{lig}} R'$$

$$\Rightarrow R \sim_{\text{lig}} R' \Rightarrow R = R'$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{lig}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{lig}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

equivalentes a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Applications

Calcul du Rang

PROPOSITION 9.6. Si M et N sont lignes équivalentes

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(N).$$

Ensuite on a

PROPOSITION 9.7. Si R est échelonnée avec r échelons alors

$$\text{rg}(R) = r.$$

Preuve : si est ech avec r echellons
on a les r premières lignes $\neq \underline{0}_d$

$$L_1, \dots, L_r \quad \text{et} \quad L_{r+1}, \dots, L_d' = \underline{0}_d$$

$$m_{1d} \neq 0$$

$$m_{rd} \neq 0$$

$$r = \dim \text{Vect}\{L_1, \dots, L_d\}$$

$$= \dim \text{Vect}\{L_1, \dots, L_r\}$$

les lignes $L_1, \dots, L_r$ forment une famille libre

$$\text{si on a } \lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_r L_r = \underline{0}_d$$

On regarde le j -ième coef de cette $\underline{0}$

$$\lambda_1 m_{1j} + \lambda_2 m_{2j} + \dots + \lambda_r m_{rj} = 0$$

$$\lambda_1 m_1 d_1 = 0 \quad \text{comme } m_1 d_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

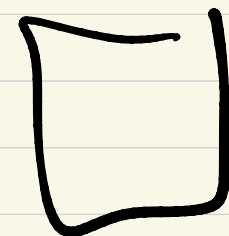
on recommence avec en regardant les

$$\lambda_2 m_2 d_2 + \dots + \lambda_r m_r d_r = 0 \quad \text{coefs}$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$d_3\text{-ieme: } \lambda_3 m_3 d_3 + \dots + \lambda_r m_r d_r = 0$$

...



Matrices Inversibles

PROPOSITION 9.8 (Critere d'inversibilite par operations elementaires). Soit $M \in M_d(K)$ une matrice carree alors M est inversible ssi M est ligne equivalente a la matrice identite Id_d .

Preuve: si $M \sim_{\text{lig}} \text{Id}_d$ il existe

des Matrices de TELs $T_1, \dots, T_n$ tq

$$\underbrace{T_n \cdots T_2 T_1}_{\in GL_d(K)} M = \text{Id}_d$$

$\text{GL}_d(K)$

$T_n \cdots T_1$ inverse M

$\Rightarrow M$ est inversible d'inverse

$$M^{-1} = T_n \dots T_{n-1} \times \dots \times T_1$$

Rmq: on sait que M est inversible car
de rang $r=d$ et son inverse est unique
et comme $(T_n \dots T_{n-1} \times \dots \times T_1) \cdot M = \text{Id}_d$

$$\Rightarrow M^{-1} = T_n \dots T_{n-1} \times \dots \times T_1.$$

Reciproquement si M est inversible
alors M est de $\text{rg } d$ et est
ligé qui a une matrice réduite
de $\text{rg } d$, R_d . R_d possède d
pivot

$$R_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Methode des Vases Communicants

Soit M inversible. On veut calculer son inverse M^{-1} . On sait que il existe $T_1, \dots, T_n$ des TELs

$$T_n \times \dots \times T_1 M = \text{Id}$$

$$M^{-1} = T_n \times \dots \times T_1$$

$$T_n^x \times T_2^x T_1 M \quad T_n^x \times T_2^x T_1^x \text{Id}_d$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ \text{Id}_d \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ M^{-1} \end{matrix}$$

pour obtenir M^{-1} on a fait subir à Id_d
 les m[^]mes opérations sur les lignes que M

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$